Concours des 24, 25 et 26 mai 1982 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
(Options M.P.T.)

***

MATHEMATIQUES

(à distribuer aux candidats)

1er PROBLEME

Dans un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'arc paramétré $\mathscr{C}$ défini par la relation $\overrightarrow{OM}(t) = \left(t + \sin t - 4 \sin\frac{t}{2}\right)\vec{i} + \left(3 + \cos t - 4 \cos\frac{t}{2}\right)\vec{j}$ où

$t \in [0, 4\pi]$.

On prend le point $M(o)$ obtenu pour $t = o$ comme origine des arcs et on oriente $\mathscr{C}$ dans le sens des t croissants.

1°) Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{M(o)\,M(t)}$ et la longueur totale de l'arc $\mathscr{C}$.

2°) Expliciter les composantes des vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$, portés respectivement par la tangente et la normale orientées à $\mathscr{C}$ en $M(t)$.

Calculer le rayon de courbure R en chaque point $M(t)$ de l'arc $\mathscr{C}$.

3°) Déterminer les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ du centre de courbure $N(t)$ de $\mathscr{C}$. Représenter graphiquement l'arc $\Gamma = \{ N(t) \ / \ t \in [0, 4\pi] \}$ décrit par le point N. A quel type de courbe Γ appartient-il ?

2ème PROBLEME

1°) Démontrer pour tout réel x n'appartenant pas à $S = \{ k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$ que $\dfrac{\sin(2n+1)x}{(\sin x)^{2n+1}}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de puissances de cotg x.

2°) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R} \qquad C^{1}_{2n+1}\, x^{n} - C^{3}_{2n+1}\, x^{n-1} + \dots (-1)^{k}\, C^{2k+1}_{2n+1}\, x^{n-k} + \dots (-1)^{n} = 0$$

3°) En utilisant les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme calculer les deux sommes

$$\sum_{p=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 \frac{p\pi}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{p\pi}{2n+1}}$$

4°) Lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$ établir que $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

a – En déduire un encadrement de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

b – En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ (on ne demande pas de prouver la convergence de cette série).

5°) En déduire la valeur des sommes des séries suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

3ème PROBLEME

Dans toute la suite n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à deux, $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées à éléments réels à n lignes et n colonnes.

Lorsque A appartient à $\mathcal{M}$ on note a_{ij} l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

$\mathcal{M}$ est muni de sa structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$ de dimension n^2. J désigne l'élément de $\mathcal{M}$ dont tous les éléments sont égaux à un. On considère le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}$ formé des matrices A telles que les 2 n réels

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad , \quad \sum_{q=1}^{n} a_{iq} \qquad (i,j) \in \{1, 2, \dots n\}^2$$

soient tous égaux. On note alors d(A) leur valeur commune.

1°) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et que d est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$.

2°) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe un réel λ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

3°) a - Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}$ et que d est un homomorphisme d'anneaux.

b - Montrer que si A est une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$, d(A) est non nul et A^{-1} appartient aussi à $\mathcal{E}$. Comparer $d(A^{-1})$ et $d(A)^{-1}$. Si d(A) est non nul, A est-elle inversible ?

4°) Soit A un élément de $\mathcal{E}$, on note $B = \frac{d(A)}{n} J$ et $C = A - B$.

Calculer BC et CB puis comparer A^p et $B^p + C^p$ pour tout entier naturel p.

5°) Soit $\mathcal{F} = \{ A \in \mathcal{E} \ / \ d(A) = 0 \}$ et $\mathcal{G} = \{ A = \lambda J \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{E}$.

6°) r et s sont des entiers compris entre 2 et n (au sens large).

$T_{r,s}$ désigne la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf quatre

$$t_{11} = t_{rs} = 1 \text{ et } t_{1s} = t_{r1} = -1.$$

a - Montrer que l'ensemble $\mathcal{T} = \left\{ T_{r,s} \ / \ (r,s) \in \{2, 3, \dots n\}^2 \right\}$ constitue une base de $\mathcal{F}$

b - En déduire quelles sont les dimensions de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{E}$.

-§-